Математика и информатика

УДК 512.552.7,512.547.23

А. В. КУХАРЕВ, Г. Е. ПУНИНСКИЙ

ПОЛУЦЕПНОСТЬ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ И СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

Исследуется структура групповых колец симметрических S_n и знакопеременных A_n групп над произвольным полем F положительной характеристики. Цель – установить необходимые и достаточные условия, при которых групповые кольца FS_n и FA_n будут полуцепными.

Показано, что необходимым условием полуцепности колец FS_n и FA_n является выполнение условия $n < 2p$, откуда, в частности, следует, что для заданного поля F существует не более чем конечное число знакопеременных и симметрических групп, чьи групповые кольца над полем F полуцепные, но не классически полупростые. Методами теории представлений симметрических групп доказывается, что при $p \geq 5$ групповое кольцо FS_n не может быть полуцепным. С использованием теории Ауслендера результат о полуцепности колец FS_n переносится на кольца вида FA_n (для случая $p > 2$).

В результате доказано следующее утверждение. Пусть F – произвольное поле характеристики p. Тогда групповое кольцо FS_n – полуцепное и не классически полупростое, если и только если либо $p = 2$ и $n = 2, 3$, либо $p = 3$ и $n = 3, 4, 5$. Групповое кольцо FA_n – полуцепное и не классически полупростое, если и только если $p = 3$ и $n = 3, 4, 5$.

Таким образом, получен полный ответ на вопрос, в каких случаях групповые кольца FS_n и FA_n являются полуцепными и не классически полупростыми.

Ключевые слова: полуцепное кольцо; групповое кольцо; симметрическая группа; знакопеременная группа.

In the article, the structure of group rings of symmetric S_n and alternating A_n groups over an arbitrary field F of positive characteristic are studied. The purpose is to establish necessary and sufficient conditions under which the group rings FS_n and FA_n are serial.

We show that a necessary condition for the seriality of rings FS_n and FA_n is the condition $n < 2p$. In particular, for a given field F, there is no more than a finite number of alternating and symmetric groups whose group rings over the field F are non-semisimple serial. Using the methods of the representations theory of symmetric groups, we prove that the group ring FS_n can not be a serial when $p \geq 5$. Using the Auslander theory, the result obtained for FS_n is transferred on the rings FA_n (for the case $p > 2$).

The main result of the paper is the following statement. Let F be an arbitrary field of characteristic p. Then FS_n is a non-semisimple serial ring if and only if either $p = 2$ and $n = 2, 3$, or $p = 3$ and $n = 3, 4, 5$. The ring FA_n is a non-semisimple serial if and only if $p = 3$ and $n = 3, 4, 5$.

Thus, we have obtained a complete answer to the question in what cases group rings FS_n and FA_n are non-semisimple serial.

Key words: serial ring; group ring; symmetric group; alternating group.

Модуль над кольцом называется *цепным*, если решетка его подмодулей является цепью. Кольцо R называется *полуцепным*, если оно как левый R-модуль и как правый R-модуль есть прямая сумма цепных модулей. Полуцепное артиново кольцо, обладающее структурой алгебры, часто также называется *алгеброй Накаямы* [1, гл. 9]. Настоящая статья посвящена изучению вопроса о полуцепности групповых колец конечных симметрических и знакопеременных групп над полем положительной характеристики.

В монографии [1, с. 276] поставлен следующий вопрос.

Вопрос. *Пусть F – алгебраически замкнутое поле характеристики p. Верно ли, что существует бесконечное множество значений n таких, что групповое кольцо симметрической группы S_n (или знакопеременной группы A_n) над полем F является полуцепным, но не классически полупростым?*

Отрицательный ответ на этот вопрос следует из простых соображений (см. ниже факты 1 и 2). Усилим данное утверждение, доказав, что существует только конечное число пар (p, n), для которых групповое кольцо FS_n (или FA_n) над полем F характеристики p полуцепное и не классически полупростое. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть F – произвольное поле характеристики p. Тогда:*

1) *групповое кольцо FS_n полуцепное и не классически полупростое, если и только если либо $p = 2$ и $n = 2, 3$, либо $p = 3$ и $n = 3, 4, 5$;*

2) *групповое кольцо FA_n полуцепное и не классически полупростое, если и только если $p = 3$ и $n = 3, 4, 5$.*

Отметим, что вопрос о полуцепности модулярных групповых колец конечных групп исследовался достаточно подробно [2, с. 134–152; 3, с. 201–216], но полный ответ на него еще не получен.

Базовые сведения

Напомним, что модуль M над кольцом R называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Например, любой простой модуль является цепным. *Полуцепным* модулем называется любая прямая сумма цепных модулей. Скажем, что кольцо R *полуцепное*, если оно полуцепное как правый и как левый модуль над собой. Последнее условие эквивалентно тому, что R содержит полную систему ортогональных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$ такую, что все правые модули e_iR являются цепными, и то же верно для левых модулей Re_i. Например, любое классически полупростое кольцо полуцепное.

Нас будет интересовать вопрос о полуцепности группового кольца FG конечной группы G над полем характеристики p. По теореме Машке [4, с. 157] кольцо FG является классически полупростым, если и только если p не делит порядок группы G. Итак, исследуя вопрос о полуцепности группового кольца, достаточно рассмотреть p-модулярный случай, т. е. когда p делит порядок G.

Известно [4, гл. 32], что любое артиново полуцепное кольцо имеет конечный тип представлений. Из теоремы Хигмана [5, с. 377–381], описывающей групповые кольца конечного типа представлений, получаем следующий факт.

Факт 1. *Пусть G – конечная группа и F – произвольное поле характеристики p. Если групповое кольцо FG полуцепно, то силовская p-подгруппа P группы G является циклической.*

Для знакопеременной и симметрической группы это случается довольно редко.

Следующий факт хорошо известен.

Факт 2. *Силовские p-подгруппы групп S_n и A_n циклические тогда и только тогда, когда $n < 2p$.*

Для доказательства теоремы понадобятся некоторые сведения из теории модулярных представлений групп.

Пусть F – алгебраически замкнутое поле характеристики p, G – конечная группа с циклической нетривиальной силовской p-подгруппой P. Теория представлений таких групп хорошо известна и описывается с помощью деревьев Брауэра блоков кольца FG (т. е. неразложимых прямых слагаемых FG как кольца) [6, гл. VII]. В частности, групповое кольцо FG полуцепное, если и только если дерево Брауэра любого блока кольца FG является звездой, причем при наличии исключительного характера он находится в ее центре [6, гл. VII, следствие 2.22; 7, гл. 5]. Вычисление деревьев Брауэра – очень сложная задача (см. [8]).

Доказательство для симметрической группы

В этом разделе докажем основную теорему работы для случая симметрической группы S_n.

Предложение. *Пусть F – произвольное поле характеристики p. Групповое кольцо FS_n полуцепное и не классически полупростое, если и только если либо $p = 2$ и $n = 2, 3$, либо $p = 3$ и $n = 3, 4, 5$.*

Прежде чем доказывать это предложение, напомним, что любое неприводимое p-модулярное представление группы S_n над алгебраически замкнутым полем однозначно определяется диаграммой Юнга, которая p-регулярна, т. е. не содержит p строк одинаковой длины [9, гл. 10]. Для такой диаграммы, удаляя максимальное количество косых p-крюков, получаем ее p-сердцевину. Число p-крюков, удаленных из диаграммы Юнга при этой процедуре, называется ее *высотой*. Например, для диаграммы (p), состоящей из одной строчки длиной p группы S_p, получаем пустую диаграмму, удаляя один косой крюк. Следовательно, высота такой диаграммы равна 1.

Теорема Накаямы [9, теорема 21.11] утверждает, что два модулярных представления группы S_n лежат в одном блоке, если и только если соответствующие диаграммы имеют одинаковые p-сердцевины. Например, для группы S_p все диаграммы вида $(i, 1^{p-i})$, где $i = 1, \ldots, p$, лежат в одном (главном) блоке высотой 1. Поскольку все обыкновенные характеры симметрической группы вещественны, то дерево Брауэра этого блока представляет собой открытый полигон (т. е. прямую линию) с p вершинами и $p - 1$ ребром. При $p > 3$ этот граф не является звездой, поэтому главный блок кольца FS_p – неполуцепное кольцо, в частности само кольцо FS_p неполуцепное (над полем F характеристики p). Заметим также, что все остальные блоки этого кольца полупростые (поскольку высота любой диаграммы не из главного блока равна 0).

Докажем теперь предложение.

Доказательство. Из классификации простых FS_n-модулей [9] вытекает, что любой такой модуль абсолютно неприводим. Тогда из [3, предложение 3] следует, что полуцепность этого кольца не зависит от поля, в частности, можно считать, что F алгебраически замкнуто. В этом случае мы можем свободно применять классическую теорию представлений.

С учетом теоремы Машке и факта 2 достаточно рассмотреть только те групповые кольца FS_n, для которых выполняется условие $p \le n < 2p$.

Предположим сначала, что $p \ge 5$. Покажем, что в этом случае кольцо FS_n неполуцепное при $p \le n < 2p$. Для такого n кольцо FS_n неполупростое, следовательно, содержит хотя бы один блок B высотой $l \ge 1$. Поскольку мы не можем удалить два косых p-крюка из диаграммы (в ней менее $2p$ элементов), то этот блок имеет высоту 1, а все остальные блоки – высоту 1 и 0. Из [10, теорема 1] вытекает, что все блоки дефекта 1 Морита-эквивалентны, более того, они Морита-эквивалентны некоторому блоку высотой 1 кольца FS_p. Поскольку полуцепность является Морита-инвариантным свойством и FS_p имеет только один (главный) блок высотой 1, который неполуцепной, то мы заключаем, что блок B неполуцепной.

Итак, осталось рассмотреть только кольца FS_n над полем характеристики 2 и 3.

Для $p = 2$ оставшиеся случаи $n = 2$ и $n = 3$. Обе группы $S_2 = C_2$ и S_3 являются 2-нильпотентными, и полуцепность их групповых колец известна [2, теорема 4.3; 11, теорема 6].

Предположим теперь, что $p = 3$ и рассмотрим случаи $n = 3, 4, 5$. Группы S_3 и S_4 – разрешимые, поэтому полуцепность их групповых колец вытекает из [12, с. 177–194; 3, теорема 1]. Группа S_5 не является 3-разрешимой, однако известно, что кольцо FS_5 полуцепно, если характеристика поля $p = 3$ (см., например, [1, с. 258]). Последний факт следует также из полуцепности FA_5 при $p = 3$ [3, лемма 3] и леммы (доказанной ниже). Предложение доказано.

Заметим, что структура приведенных выше полуцепных групповых колец симметрической группы может быть вычислена явно. Например, для S_4 и произвольного поля F характеристики 3 это сделано в [3]. Для S_3 необходимые вычисления можно провести и вручную. Пусть $a = (1\ 2)$, $b = (1\ 2\ 3)$ – порождающие группы S_3. Тогда идемпотенты $e_1 = (1 + a)/2$ и $e_2 = (1 - a)/2$ ортогональны, неразложимы и $e_1 + e_2 = 1$. Оба проективных модуля e_1R и e_2R являются цепными длиной 3, но не изоморфны между собой. Нетрудно видеть, что кольцо FG изоморфно следующему полуцепному факторкольцу:

$$\begin{pmatrix} F[x] & F[x] \\ xF[x] & F[x] \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} x^2F[x] & xF[x] \\ x^2F[x] & x^2F[x] \end{pmatrix}.$$

Доказательство для знакопеременной группы

Завершим доказательство теоремы. Осталось рассмотреть групповые кольца знакопеременной группы A_n. В этом случае для конечных полей F имеются простые FA_n-модули, которые не являются абсолютно неприводимыми (т. е. расщепляются при расширении поля), поэтому мы не можем просто перейти к алгебраически замкнутому полю, как в случае группы S_n.

Используем следующий обходной маневр. Ауслендер [13, с. 112] называет артинову алгебру *A алгеброй Накаямы*, если любой проективный и любой инъективный неразложимый A-модуль полуцепен. Поскольку групповое кольцо FG конечной группы G всегда квазифробениусово (т. е. любой инъективный модуль проективен [4, гл. 33]), то оно является алгеброй Накаямы, если и только если FG полуцепное кольцо.

Лемма. *Пусть F – произвольное поле характеристики $p > 2$ и пусть $n \ge 3$. Тогда кольцо FS_n полуцепное, если и только если кольцо FA_n полуцепное.*

Доказательство. Заметим, что S_n является полупрямым расширением своей нормальной подгруппы A_n с помощью циклической группы C_2, порожденной транспозицией (1 2), поэтому групповое кольцо FS_n изоморфно косому групповому кольцу ΛC_2, где $\Lambda = FA_n$; C_2 действует на Λ сопряжением (см. [13] для определения косого группового кольца).

Поскольку $p > 2$, то p не делит порядок группы C_2. Тогда из [13, теорема 2.14] вытекает, что полуцепность кольца $FS_n = \Lambda C_2$ эквивалентна полуцепности $FA_n = \Lambda$. Лемма доказана.

Заметим, что кольцо FA_n является полупростым для $n = 2, 3$ и $p = 2$. Теперь теорема вытекает из предложения и леммы.

Авторы благодарны рецензенту за ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению настоящей статьи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Baba Y., Oshiro K. Classical Artinian Rings. Singapore, 2009.

2. Кухарев А. В., Пунинский Г. Е. Полуцепные групповые кольца конечных групп. p-Нильпотентность // Записки научных семинаров ПОМИ. СПб., 2013. Т. 413. С. 134–152.

3. Kukharev A., Puninski G. Serial group rings of finite groups. p-Solvability // Algebra Discrete Math. 2013. Vol. 16. P. 201–216.

4. Anderson F. W., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules // Springer Graduate Texts in Math. 2nd ed. 1992. Vol. 13.
5. Higman D. G. Indecomposable representations at characteristic *p* // Duke J. Math. 1954. Vol. 21. P. 377–381.
6. Feit W. The Representation Theory of Finite Groups. Amsterdam, 1982.
7. Alperin J. L. Local Representation Theory. Cambridge, 1986.
8. Hiss G. Brauer Trees of Sporadic Groups. Oxford, 1998.
9. James G. D. The Representation Theory of the Symmetric Group // Lecture Notes in Math. Springer, 1978. Vol. 682.
10. Scopes J. Cartan matrices and Morita equivalence for blocks of the symetric groups // J. Algebra. 1991. Vol. 142. P. 441–455.
11. Murase I. Generalized uniserial group rings. II // Sci. Papers College Gener. Tokyo, 1965. Vol. 15. P. 111–128.
12. Morita K. On group rings over a modular field which possess radicals expressible as principal ideals // Sci. Repts. Tokyo, 1951. Vol. 4. P. 177–194.
13. Auslander M., Reiten I. Representation Theory of Artin Algebras // Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge, 1995. Vol. 36.

Поступила в редакцию 09.12.2013.

Андрей Валерьевич Кухарев – аспирант кафедры высшей алгебры и защиты информации. Научный руководитель – Г. Е. Пунинский.

Геннадий Евгеньевич Пунинский – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры и защиты информации.